

Leçon 191 - Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.

Extrait du rapport de jury

Le jury souhaite proposer une leçon qui offre une ouverture large autour du thème de la géométrie. Avec cet intitulé, les candidates et candidats sont libres de présenter des résultats et des exemples très variés en lien avec la géométrie. L'objectif n'est pas de couvrir le plus d'aspects possible, mais plutôt d'en proposer certains suffisamment consistants et variés. À partir du moment où ils sont de nature géométrique, tous les éléments du programme peuvent être pertinents. En contrepartie de cette liberté laissée aux candidates et candidats, une difficulté est de structurer la présentation des objets et des notions choisies. Ainsi, plusieurs approches sont possibles pour organiser cette leçon, par exemple :

- En regroupant les outils par "famille" : outils matriciels (repérage des points par des matrices colonnes, des transformations par des matrices, rang, réduction, etc.), outils polynomiaux (formes quadratiques, déterminant, résultant, etc.), outils structurels (groupes, corps) ;
- Ou par niveau d'abstraction/de généralité (nombres réels, complexes, matrices, groupes...);
- Ou par type d'objectifs (identifier des objets géométriques, les mesurer, les classer, démontrer des résultats en utilisant des transformations géométriques...).

Il est aussi possible de se focaliser sur un seul type d'outils (par exemple linéaire, géométrie affine ou groupes) en détaillant plusieurs applications en géométrie ou sur une question géométrique fouillée à l'aide de diverses techniques (par exemple sur des problèmes impliquant des figures géométriques comme les cercles et triangles, les polygones et polyèdres réguliers, etc.). Des situations "élémentaires", dans le plan, permettent certainement de mettre en valeur des connaissances et un recul mathématique. Il faut bien éviter l'écueil d'un catalogue fastidieux ou celui qui consisterait à recycler directement le contenu d'une autre leçon avec un vague habillage géométrique.

Parmi les nombreux éléments qui peuvent être discutés, on peut indiquer :

- Les notions de distance, aire, volume. Notamment les propriétés de la matrice de Gram, le lien entre déterminant et aire d'un parallélogramme ou volume d'un parallélépipède, la construction du produit vectoriel et du produit mixte,... peuvent être exploités avec pertinence dans cette leçon. On peut ainsi être amené à étudier l'aire balayée par un arc paramétré du plan, la position d'un point par rapport à un cercle circonscrit à un triangle, etc. Le déterminant de Cayley-Menger permet de mettre en évidence des conditions pour que $n + 1$ points de \mathbb{R}^n forment une base

affine, ou que $n + 2$ points de \mathbb{R}^n soient cocycliques. Dans une autre direction, la division euclidienne dans \mathbb{Z} donne une preuve d'une forme du théorème de la base adaptée, avec pour conséquence le calcul du volume (d'une maille élémentaire) d'un sous réseau de \mathbb{Z}^n comme étant le déterminant d'un système générateur dans la base canonique.

- L'apport de l'algèbre linéaire à la géométrie. On peut ainsi exploiter le calcul matriciel et les techniques de réduction pour mettre en évidence des informations de nature géométrique (avec les exemples fondamentaux des homothéties, projections, symétries, affinités, rotations, la classification des isométries vectorielles, etc.). On peut être alors amené à présenter le théorème de Cartan-Dieudonné sur la décomposition d'isométries euclidiennes en produit de réflexions ou encore évoquer une (ou des) interprétation(s) géométrique(s) de la décomposition en valeurs singulières. Dans cette même veine, la leçon peut être orientée vers la géométrie affine, en s'adossant à la théorie des espaces vectoriels pour définir certains objets (espaces et sous-espaces affines, applications affines, repères affines, etc), ce qui permet, par exemple, d'établir ainsi certains résultats classiques, comme les théorèmes de Thalès, Pappus, Desargues,...
- L'analyse des formes quadratiques permet d'aborder des problèmes géométriques : étude des coniques, quadriques, classification des quadriques de \mathbb{R}^n , interprétation géométrique de la signature, application des méthodes de réduction, etc.
- La théorie des groupes est un champ naturel pour cette leçon (mais qui n'est cependant pas indispensable) : groupes de transformations (isométries, déplacements, similitudes, translations), composition de transformations, mise en évidence d'invariants fondamentaux (angle, birapport, excentricité d'une conique). Il est possible de se focaliser sur des groupes de transformations préservant une certaine structure géométrique et en distinguant parmi eux les groupes finis (groupes d'isométries classiques), les groupes discrets infinis (avec des translations, groupes de pavages) et, pour aller plus loin, les groupes continus (groupes de Lie).
- Les techniques de convexité constituent aussi un champ fructueux : le théorème de séparation par un hyperplan dans \mathbb{R}^n de Hahn-Banach et, en corollaire, le théorème de Helly permettent par exemple d'établir des propriétés intéressantes sur les cordes de convexes compacts.
- Certains candidates et candidats peuvent trouver intérêt à aborder les questions d'intersection de courbes polynomiales, qui permettent notamment de mettre en oeuvre le théorème de Bézout et des méthodes exploitant la notion de résultant.
- Un grand nombre de problèmes de géométrie peuvent être traités en exploitant le formalisme des nombres complexes. Il est tout à fait approprié d'évoquer l'étude des inversions et, en particulier la possibilité de ramener un cercle à une droite et inversement ; la formule de Ptolémée illustre bien l'utilisation de cet outil. On peut parler des suites définies par récurrence par une homographie et leur lien avec la réduction dans $SL_2(\mathbb{C})$ et aborder la construction de la sphère de Riemann.
- Les problématiques de la construction à la règle et au compas constituent un autre

axe pertinent pour cette leçon, avec le théorème de Wantzel, et peuvent conduire à s'intéresser à des extensions de corps.

Comme dans le cas des autres leçons, il est tout à fait bienvenu de chercher à illustrer cette leçon par des exemples issus de l'analyse, des probabilités, de la statistique (par exemple en évoquant l'interprétation géométrique de l'analyse en composantes principales), du calcul formel (par exemple avec les applications du résultant) ou du calcul scientifique (par exemple en présentant des problématiques de géométrie computationnelle, comme le calcul d'enveloppe convexe, les algorithmes de triangulation Delaunay, les diagrammes de Voronoi...). Les thèmes en lien avec la géométrie projective ou la géométrie algébrique peuvent permettre à certains candidates et candidats de présenter des résultats très avancés. Cette leçon nécessite une préparation très personnelle et réfléchie. Les exemples et les résultats qui y sont présentés ont vocation à inciter les candidates et candidats à enrichir les autres leçons de cette épreuve d'exemples issus de la géométrie.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 191 intitulée : "Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.". Le but de cette leçon sera de montrer que l'algèbre et la géométrie ne sont pas deux ensembles disjoints des mathématiques mais qu'au contraire ils sont reliés plus qu'on ne le pense. On s'efforcera donc de faire apparaître ces liens et de les exploiter au travers de divers problèmes plus ou moins classiques afin de résoudre des problèmes de nature géométriques à l'aide d'outils d'algèbre.

Dans une première partie on s'intéresse aux isométries dans un espace vectoriel euclidien de dimension 2 et 3 en commençant par parler du groupe des isométries vectorielles. On introduit ainsi les notions d'isométrie vectorielle puis de réflexion et de rotation avant de donner la définition du groupe orthogonal et du groupe spécial orthogonal. On termine ce premier point avec le théorème de Cartan-Dieudonné qui nous donne une famille génératrice de ce groupe et qui est à la base de la classification des isométries vectorielles en dimension 2 et 3. On s'intéresse ensuite plus spécifiquement au cas de la dimension 2 en montrant que les seules isométries vectorielles sont l'identité, les rotations et les symétries orthogonales et on montre que $SO(E)$ est commutatif (cas exceptionnel). On définit ensuite la mesure d'un angle orienté dans le cas du plan grâce aux rotations en dimension 2 et on en déduit les relations de Chasles. On passe ensuite au cas de la dimension 3 où l'on rajoute à notre classification les anti-rotations. Enfin, on s'intéresse désormais aux isométries affines où l'on va effectuer le même travail que dans le cas vectoriel en commençant par s'intéresser au groupe des isométries affines. On donne ainsi la définition d'une isométrie affine ainsi que d'un déplacement et enfin du groupe des isométries affines ainsi que la décomposition canonique qui nous permettra de classifier les isométries affines en dimension 2 et 3.

Dans une deuxième partie on s'intéresse désormais aux isométries qui préservent des polygones/polyèdres réguliers. On commence par le cas du plan avec le groupe diédral : on en donne une présentation ainsi qu'une interprétation géométrique et on remarque que D_6 est isomorphe à \mathfrak{S}_3 , ce qui sera un type de résultat qui sera encore plus flagrant dans l'espace. Pour le cas de l'espace usuel, on commence par parler de points extrémaux ce qui nous sera utile pour déterminer des groupes d'isométries laissant invariant des polyèdres. Puis ensuite on montre qu'il n'existe que 5 solides de Platon et on les donne et on donne dans la foulée les groupes d'isométries (positives) qui les laissent globalement invariant et on retrouve ainsi le lien entre les groupes symétriques et des isométries vue précédemment.

Dans une troisième partie on revient dans le plan en s'intéressant aux polygones. On commence par étudier la convergence d'une suite de polygones grâce aux matrices circulantes avant de passer à la constructibilité du n -gone à la règle non graduée et au compas. Pour cela, on commence par donner les règles du jeu ainsi que la définition d'un nombre constructible. On remarque ensuite que l'on peut réaliser la plupart des constructions géométriques et il est donc naturel de se demander si l'on peut réaliser toutes les constructions géométriques (spoiler : c'est non !) et sinon trouver une caractérisation de la constructibilité : c'est ce que l'on va faire par la suite. On

commence par montrer que les nombres constructibles forment un sous-corps de \mathbb{C} et que si un nombre α est constructible, alors l'extension $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ est de degré une puissance de 2. Ce critère n'est qu'une condition nécessaire mais très puissante car sa contraposée permet de montrer facilement si un nombre est constructible ou non. On termine ensuite par le théorème 59 qui donne enfin une caractérisation de la constructibilité (mais au pris d'une démonstration complexe...) et qui permet de répondre aux 3 problèmes grecs antiques (trisection de l'angle, duplication du cube et quadrature du cercle). On conclut cette leçon avec le théorème de Gauss-Wantzel ainsi que l'interrogation de savoir ce qu'il se passe si l'on modifie les règles du jeu.

On trouvera enfin en annexe la classification des isométries vectorielles en dimension 2 et 3, une illustration de D_{10} , les 5 solides de Platon ainsi que la correspondance entre les groupes des isométries qui les préservent et le groupe \mathfrak{S}_4 et enfin une illustration de la convergence d'une suite de polygones.

Plan

I - Étude des isométries en dimension 2 et 3

- 1 - Le groupe des isométries vectorielles
- 2 - Le cas de la dimension 2
- 3 - Le cas de la dimension 3
- 4 - Le cas des isométries affines

II - Isométries laissant invariant un polygone/polyèdre régulier

- 1 - Le groupe diédral
- 2 - Isométries laissant invariant un solide de Platon

III - Autour des polygones

- 1 - Suite de polygones
- 2 - Constructibilité du n -gone régulier à la règle non graduée et au compas.

IV - Annexe

- 1 - Classification des isométries vectorielles en dimension 2
- 2 - Classification des isométries vectorielles en dimension 3
- 3 - Illustration géométrique de D_{10}
- 4 - Les 5 solides de Platon
- 5 - Correspondances entre isométries et éléments du groupe symétrique
- 6 - Suite de polygones

Cours détaillé

I Étude des isométries en dimension 2 et 3

Dans toute cette partie, on considère $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension finie notée $n \in \mathbb{N}^*$.

I.1 Le groupe des isométries vectorielles

Définition 1 : Isométrie vectorielle [Deschamps, p.1318] :

On appelle **isométrie vectorielle de E** (ou **automorphisme orthogonal de E**) tout endomorphisme f de E conservant la norme.

Proposition 2 : [Deschamps, p.1318]

Un endomorphisme f de E est une isométrie si, et seulement si, elle conserve le produit scalaire.

Définition 3 : Symétrie orthogonale/réflexion [Deschamps, p.1319] :

On appelle :

- * On appelle **symétrie orthogonale** toute symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel F parallèlement à son orthogonal F^\perp .
- * On appelle **réflexion** toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Proposition 4 : [Deschamps, p.1319]

Toute symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle.

Proposition 5 : [Deschamps, p.1320]

L'ensemble $O(E)$ des isométries vectorielles de E de muni de la composition est un groupe. En particulier, c'est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$.

Définition 6 : Rotation [Deschamps, p.1322] :

On appelle **rotation** (ou encore **isométrie positive**) toute isométrie de déterminant égal à 1.

Définition 7 : Groupe spécial orthogonal [Deschamps, p.1322] :

L'ensemble des rotations de $O(E)$ est appelé **groupe spécial orthogonal** et on le note $SO(E)$.

Proposition 8 :

L'ensemble $SO(E)$ est un sous-groupe distingué de $O(E)$ d'indice 2.

Théorème 9 : Théorème de Cartan-Dieudonné [Audin, p.56] :

Le groupe orthogonal $O(E)$ est engendré par les réflexions.
 Plus précisément, pour $f \in O(E)$ et $p = \dim(\text{Ker}(f - \text{Id}_E))$, f s'écrit comme composée de $n - p$ réflexions (donc d'au plus n réflexions).

Remarque 10 :

* La décomposition de f n'est pas unique, cependant la parité du nombre de réflexions est donnée par la déterminant de f .
 * Pour $n \geq 3$, les renversements sont également des générateurs de $SO(E)$ et tout élément de $SO(E)$ est produit d'au plus n renversements.

I.2 Le cas de la dimension 2

On suppose dans toute cette sous-partie que E est de dimension 2.

Théorème 11 :

Tout élément $f \in O(E)$ est une rotation lorsque $\det(f) = 1$ et une réflexion lorsque $\det(f) = -1$.

Remarque 12 :

Dans le plan toute rotation est composée de deux réflexions, dont l'une peut être choisie arbitrairement.

Proposition 13 : [Deschamps, p.1326]

Soit $f \in O(E)$.
 * Si $\det(f) = 1$, alors pour toute base orthonormée \mathcal{B} de E il existe $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

* Si $\det(f) = -1$, alors il existe une base orthonormée \mathcal{B} de E telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Corollaire 14 : [Audin, p.62]

Le groupe $SO(E)$ est isomorphe au groupe multiplicatif \cup des nombres complexes de module 1. En particulier, le groupe $SO(E)$ est commutatif.

Remarque 15 :

On trouvera en annexe 1 un tableau récapitulatif.

Lemme 16 : [Deschamps, p.1327]

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls de E de même norme.
 Il existe une unique rotation r telle que $r(\vec{u}) = \vec{v}$.

Définition 17 : Mesure d'un angle orienté [Deschamps, p.1327] :

On considère \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls.
 On appelle **mesure de l'angle orienté de vecteurs** $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$ une mesure θ de l'angle de l'unique rotation qui transforme $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ en $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ et l'on note $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) \equiv \theta [2\pi]$.

Proposition 18 : Relation de Chasles [Deschamps, p.1327] :

Si \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont trois vecteurs non nuls, on a alors : $(\widehat{\vec{u}; \vec{w}}) \equiv (\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}; \vec{w}}) [2\pi]$.

Remarque 19 : [Deschamps, p.1327]

On a $(\widehat{\vec{u}; \vec{u}}) \equiv 0 [2\pi]$ et $(\widehat{\vec{u}; -\vec{u}}) \equiv \pi [2\pi]$.

Grâce à la relation de Chasles, on en déduit :

$(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) \equiv -(\widehat{\vec{v}; \vec{u}}) [2\pi]$, $(\widehat{-\vec{u}; \vec{v}}) \equiv (\widehat{\vec{v}; \vec{u}}) + \pi [2\pi]$ et $(\widehat{-\vec{u}; -\vec{v}}) \equiv (\widehat{\vec{v}; \vec{u}}) [2\pi]$.

I.3 Le cas de la dimension 3

On suppose dans toute cette sous-partie que E est de dimension 3.

Théorème 20 : [Audin, p.143]

Soit $f \in O(E)$.
 * Si $\det(f) = 1$, alors f est une rotation.
 Si de plus $f \neq \text{Id}_E$, alors l'ensemble $D = \{x \in E \text{ tq } f(x) = x\}$ est une droite de E (appelée **axe de la rotation** f) et $f|_{D^\perp}$ est une rotation du plan vectoriel D^\perp .
 * Si $\det(f) = -1$, alors :
 Soit f est une réflexion par rapport à un plan, soit il existe une rotation $r \in SO(E)$ d'axe D telle qu'en notant s la réflexion par rapport au plan D^\perp , on a la relation $f = r \circ s = s \circ r$ (on dit que f est une **antirotaion d'axe** D).

Remarque 21 :

On trouvera en annexe 2 un tableau récapitulatif.

I.4 Le cas des isométries affines

Dans toute cette partie, on considère \mathcal{E} un espace affine euclidien de direction E .

Définition 22 : Isométrie affine [Audin, p.52] :

On appelle **isométrie affine** toute application $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ telle que pour tous $A, B \in \mathcal{E}$ on ait $d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A, B)$.

Remarque 23 : [Audin, p.53]

Une isométrie est affine si, et seulement si, l'application linéaire associée est une isométrie vectorielle.

Proposition 24 : [Audin, p.53]

L'ensemble $\text{Isom}(\mathcal{E})$ muni de la loi de composition \circ est un groupe.

Exemple 25 : [Audin, p.53]

Les translations, les symétries orthogonales affines et les réflexions sont des isométries affines.

Définition 26 : Déplacement [Audin, p.58]

On appelle **déplacement** toute isométrie affine dont le déterminant (celui de son application linéaire associée) est positif. Dans le cas contraire, on parle d'**anti-déplacement**.

Proposition 27 : [Audin, p.59]

$\text{Isom}^+(\mathcal{E})$ est un sous-groupe d'indice 2 de $\text{Isom}(\mathcal{E})$ (donc en particulier distingué dans $\text{Isom}(\mathcal{E})$).

Théorème 28 : [Audin, p.57]

Toute isométrie affine de \mathcal{E} peut s'écrire comme composée d'au plus $n+1$ réflexions orthogonales affines.

Proposition 29 : [Audin, p.59]

Une isométrie affine est un déplacement si, et seulement si, le nombre de réflexions qui intervient dans la décomposition de cette isométrie est pair.

Proposition 30 : Décomposition canonique [Audin, p.59] :

Soit φ une isométrie affine de \mathcal{E} .

Il existe une isométrie ψ et une translation t_v de \mathcal{E} telles que :

- * L'espace \mathcal{F} des points fixes de ψ n'est pas vide.
- * Le vecteur v de la translation est dans la direction F du sous-espace \mathcal{F} .
- * On a $\varphi = t_v \circ \psi$.

De plus, le couple (ψ, t_v) est unique, les isométries t_v et ψ commutent et on a la relation $F = \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_{\mathcal{E}})$.

On suppose dans le premier théorème qui suit que \mathcal{E} est de dimension 2 puis de dimension 3 dans le deuxième théorème.

Théorème 31 : [Audin, p.86]

Soit $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$.

- * Soit f est une translation de vecteur quelconque $u \in E$ (si $u = 0_E$ alors $f = \text{Id}_E$).
- * Soit f est de la forme $t_u \circ s_D = s_D \circ t_u$ (avec s_D une réflexion orthogonale affine par rapport à une droite D et $u \in D$). f est alors appelée **réflexion glissée d'axe D et de vecteur u** (si $u = 0_E$ alors on a une réflexion orthogonale affine).
- * Soit une rotation affine distincte de Id_E , elle a alors un unique point fixe (appelé **centre**).

Théorème 32 : [Audin, p.145]

Soit $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$.

- * Soit f est une translation de vecteur quelconque $u \in E$ (si $u = 0_E$ alors $f = \text{Id}_E$).
- * Soit f est de la forme $t_u \circ s_P = s_P \circ t_u$ (avec s_P une réflexion orthogonale affine par rapport à un plan P et $u \in P$). f est alors appelée **réflexion glissée par rapport à P et de vecteur u** (si $u = 0_E$ alors on a une réflexion orthogonale affine).
- * Soit f est de la forme $t_u \circ r = r \circ t_u$ (avec r une rotation affine ayant pour ensemble de points fixe une droite D et $u \in D$). f est alors appelée **visage d'axe D et de vecteur u** (si $u = 0_E$ alors on a une rotation affine d'axe D).
- * Soit f est de la forme $r \circ s_P = s_P \circ r$ (avec r une rotation affine d'axe D et s_P la réflexion affine par rapport à un plan P et orthogonal à D). f est alors appelée **antirotation affine d'axe D et par rapport à P** et elle a un unique point fixe qui est le point d'intersection de D et P et appelé **centre de l'antirotation affine**.

II Isométries laissant invariant un polygone/polyèdre régulier

II.1 Le groupe diédral

Définition 33 : Groupe diédral [Berhuy, p.274] :

On appelle **groupe diédral d'ordre $2n$** le groupe défini par la présentation suivante : $D_{2n} \cong \langle a, b \mid a^n = 1, b^2 = 1, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$.

Proposition 34 : [Delcourt, p.98]

Le groupe diédral d'ordre $2n$ est un groupe non abélien de cardinal $2n$.

Remarque 35 : [Perrin, p.23]

Le groupe diédral d'ordre $2n$ possède une interprétation géométrique : il s'agit du groupe des isométries du plan euclidien conservant globalement un polygone régulier à n côtés. Il est engendré par la rotation τ de mesure d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et la symétrie orthogonale σ par rapport à l'axe (Ox) (cf. annexe 3).

Remarque 36 : [Perrin, p.23]

Le sous-groupe des rotations est distingué et isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et comme $\text{Card}(D_{2n}) = 2n$, on a donc une suite exacte :

$$\{\text{Id}\} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow D_{2n} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \{\text{Id}\}$$

et un isomorphisme $D_{2n} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exemple 37 : [Perrin, p.23]

Le groupe D_6 des isométries laissant globalement invariant la triangle équilatéral est isomorphe à \mathfrak{S}_3 (ce qui s'observe lorsque l'on numérote les sommets).

II.2 Isométries laissant invariant un solide de Platon

Dans toute cette sous-partie, on fixe un espace affine euclidien \mathcal{E} de dimension 3.

Proposition 38 : [Combes, p.145]

Soit X une partie convexe de \mathcal{E} .

* Si $x \in X$ est un point extrémal de X et $f \in \text{Isom}(X)$, alors $f(x)$ est un point extrémal de X .

* Les points extrémaux d'un polyèdre convexe fermé de \mathcal{E} sont ses sommets.

Proposition 39 :

Soit \mathcal{P} un polyèdre convexe de \mathcal{E} .

Si l'on note \mathcal{P}_s l'ensemble des sommets de \mathcal{P} , alors on a $\text{Isom}(\mathcal{P}) = \text{Isom}(\mathcal{P}_s)$ et $\text{Isom}^+(\mathcal{P}) = \text{Isom}^+(\mathcal{P}_s)$.

Remarque 40 :

* Plus généralement, une isométrie d'un polyèdre convexe non aplati de l'espace préserve les sommets, les arêtes et les faces du polyèdre.

* Si \mathcal{P} est un polyèdre convexe non aplati de l'espace, on en déduit qu'il existe un morphisme de groupes injectif $\lambda : \text{Isom}(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Bij}(X)$, avec X l'ensemble des sommets de \mathcal{P} .

Théorème 41 : [Combes, p.147]

L'ensemble des polyèdres réguliers de \mathcal{E} sont à similitude près le tétraèdre régulier, le cube, l'octaèdre régulier, le dodécaèdre régulier et l'icosaèdre régulier.

Théorème 42 : [Combes, p.175]

On a $\text{Isom}^+(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{S}_4$ et $\text{Isom}(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Remarque 43 :

On donne en annexe 5 une correspondance entre les éléments de \mathfrak{S}_4 et de $\text{Isom}^+(\mathcal{C})$.

Théorème 44 : [Caldero (1), p.222 + 227]

* On a $\text{Isom}^+(\mathcal{T}) \cong \mathfrak{A}_4$ et $\text{Isom}(\mathcal{T}) \cong \mathfrak{S}_4$.

* On a $\text{Isom}^+(\mathcal{O}) \cong \mathfrak{S}_4$ et $\text{Isom}(\mathcal{O}) \cong \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

* On a $\text{Isom}^+(\mathcal{D}) \cong \text{Isom}^+(\mathcal{I}) \cong \mathfrak{A}_5$ et $\text{Isom}(\mathcal{D}) \cong \text{Isom}(\mathcal{I}) \cong \mathfrak{A}_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Théorème 45 : [Combes, p.171]

Les sous-groupes finis de $\text{Isom}^+(\mathcal{E})$ sont exactement à isomorphismes près :

* Le groupe cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. * Le groupe diédral D_{2n} .

* Les groupes \mathfrak{A}_4 , \mathfrak{S}_4 et \mathfrak{A}_5 .

Remarque 46 :

* Ce théorème s'applique aussi aux sous-groupes finis de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ car on peut le considérer comme un sous-groupe de $\text{Isom}^+(\mathcal{E})$.

* Chacun des groupes ci-dessus est le groupe des déplacements d'un polyèdre de l'espace affine euclidien \mathcal{E} (respectivement le groupe des déplacements d'un polygone régulier à n côtés, le groupe des déplacements d'un "épaississement" d'un polygone régulier à n côtés et enfin le groupe des déplacements d'un tétraèdre régulier, d'un cube et d'un dodécaèdre régulier).

III Autour des polygones

III.1 Suite de polygones

Définition 47 : Matrice circulante [Gourdon, p.190] :

On appelle **matrice circulante** toute matrice carrée telle que l'on passe d'une ligne à la suivante par décalage à droite des coefficients de façon circulaire. Une matrice circulante C de taille n s'écrit donc :

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

où a_1, a_2, \dots, a_n sont des nombres complexes.

Développement 1 : [cf. GOURDON + CALDERO (2)]

Proposition 48 : [Gourdon, p.153]

Si l'on note $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, alors $\det(C) = \prod_{i=0}^{n-1} P(\omega^i)$.

Proposition 49 : [Caldero (2), p.45]

Soient P un polygone du plan complexe dont les sommets sont notés z_1, \dots, z_n et $a, b \in]0; 1[$ tels que $a + b = 1$.

Si l'on définit par récurrence la suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par $P_0 = P$ et $P_{k+1} = \mathcal{B}_{a,b}(P)$ le polygone $(z'_i)_{i \in [1;n]}$ avec $z'_i = az_i + bz_{i+1}$, alors la suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers l'isobarycentre de P .

III.2 Constructibilité du n -gone régulier à la règle non graduée et au compas

Ici, chaque construction commencera de 0 et 1. Durant la construction, nous utiliserons seulement les règles suivantes :

$C1(\alpha, \beta)$: De $\alpha \neq \beta$, on peut tracer la ligne l qui passe par α et β .

$C2(\gamma, \alpha, \beta)$: De $\alpha \neq \beta$ et γ , on peut dessiner le cercle C de centre γ dont le rayon est la distance entre α et β .

$P1$: Le(s) point(s) d'intersection de deux lignes distinctes l_1 et l_2 construites comme ci-dessus.

$P2$: Le(s) point(s) d'intersection d'une ligne l et d'un cercle C construits comme ci-dessus.

$P3$: Le(s) point(s) d'intersection de deux cercles distincts C_1 et C_2 construits comme ci-dessus.

Définition 50 : Nombre constructible [Berhuy, p.762] :

Un nombre complexe α est un **nombre constructible** lorsqu'il existe une suite finie de constructions à la règle non graduée et au compas utilisant $C1$, $C2$, $P1$, $P2$ et $P3$ qui commence avec 0 et 1 et fini avec α .

Exemple 51 : [Berhuy, p.763]

Il est possible de construire une médiatrice d'un segment, le milieu d'un segment, une bissectrice d'un angle, la symétrie centrale et axiale d'un point, une perpendiculaire et une parallèle à une droite donnée.

Dans toute la suite de cette sous-partie, on note $\mathcal{C} := \{\alpha \in \mathbb{C} \text{ tq } \alpha \text{ est constructible}\}$.

Théorème 52 : [Berhuy, p.764 + 765]

L'ensemble \mathcal{C} est un sous-corps de \mathbb{C} .

De plus, on a :

* $\alpha := a + ib \in \mathcal{C}$ si, et seulement si, $a, b \in \mathcal{C} \cap \mathbb{R}$.

* Si $\alpha \in \mathcal{C}$, alors chaque racine carrée de α appartient à \mathcal{C} .

Remarque 53 :

\mathbb{Q} est constructible étant donné que \mathbb{Z} est constructible et que \mathcal{C} est un sous-corps de \mathbb{C} .

Exemple 54 :

* $2 + \sqrt{4\sqrt{5} - 3\sqrt{7}}$ est constructible.

* $\sqrt[3]{2}$ n'est pas un nombre constructible (cf. plus loin).

Théorème 55 : [Berhuy, p.775]

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

$\alpha \in \mathcal{C}$ si, et seulement si, il existe des sous-corps de \mathbb{C} tels que :

$$\mathbb{Q} := F_0 \subseteq F_1 \subseteq \dots \subseteq F_n \subseteq \mathbb{C}, \forall i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, [F_{i+1} : F_i] = 2 \text{ et } \alpha \in F_n$$

Corollaire 56 : [Berhuy, p.776]

Si $\alpha \in \mathcal{C}$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^m$.

Remarque 57 :

* Le corollaire précédent implique que tout $\alpha \in \mathcal{C}$ est algébrique sur \mathbb{Q} et que le degré de son polynôme minimal est une puissance de 2. On a alors $\mathbb{Q} \subsetneq \mathcal{C} \subsetneq \mathcal{A}$ avec \mathcal{A} l'ensemble des nombres algébriques sur \mathbb{Q} .

* La contraposée du corollaire précédent est très utile car elle permet de voir que pour qu'un nombre n'est pas constructible, il suffit de déterminer le degré de son polynôme minimal sur \mathbb{Q} .

Corollaire 58 :

\mathcal{C} est le plus petit sous-corps de \mathbb{C} qui est fermé pour l'opération d'extraction de racine carrée.

Théorème 59 : [Berhuy, p.929]

Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ algébrique sur \mathbb{Q} et \mathbb{L} le corps de décomposition du polynôme minimal de α sur \mathbb{Q} .

α est constructible si, et seulement si, $[\mathbb{L} : \mathbb{Q}]$ est une puissance de 2.

Corollaire 60 : [Berhuy, p.787 - 788]

La trisection de l'angle, la duplication du cube et la quadrature du cercle sont impossibles à la règle non graduée et au compas.

Développement 2 : [cf. BERHUY]

Théorème 61 : Théorème de Gauss-Wantzel [Berhuy, p.795] :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Le n -gone régulier est constructible à la règle non graduée et au compas si,

et seulement si, $n := 2^s \prod_{i=1}^r p_i$ (avec $s, r \in \mathbb{N}$ et p_1, \dots, p_r qui sont r nombres

de Fermat distincts).

Exemple 62 : [Berhuy, p.805]

Il est possible de construire le pentagone régulier avec la règle non graduée et le compas.

Remarque 63 :

Certaines constructions à la règle non graduée et au compas ne sont donc pas possibles (construction de l'heptagone régulier, trisection de l'angle, etc.) Mais que se passe-t-il si l'on modifie les règles du jeu (théorème de Mohr-Mascheroni, théorème de Poncelet-Steiner, règle avec deux graduations, allumettes, origamis, etc.) ?

IV Annexe

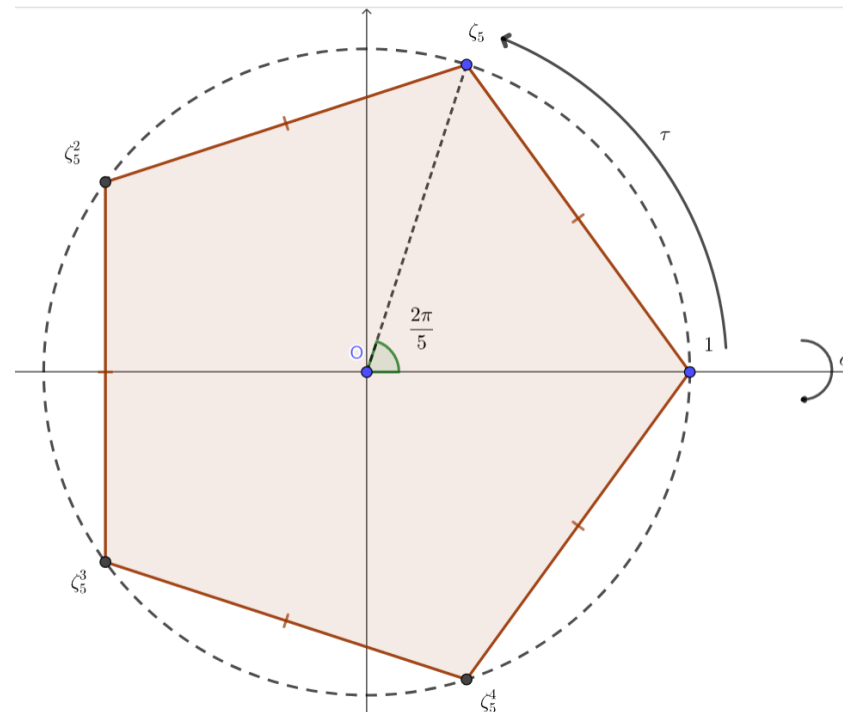
IV.1 Classification des isométries vectorielles en dimension 2

$\dim(\text{Ker}(f - \text{Id}_E))$	Isom. vect. f en dim. 2	$\det(f)$	Réduction matricielle
0	Rotation (différente de Id_E)	+1	$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ dans toute B.O.N.
1	Réflexion par rapport à une droite	-1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans une B.O.N. bien choisie
2	Id_E	+1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans une B.O.N. bien choisie

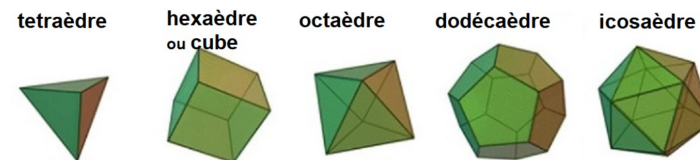
IV.2 Classification des isométries vectorielles en dimension 3

$\dim(\text{Ker}(f - \text{Id}_E))$	Isom. vect. f en dim. 3	$\det(f)$	Réduction matricielle
0	Antirotation d'axe une droite	-1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ dans une B.O.N. bien choisie
1	Rotation d'axe une droite	+1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ dans une B.O.N. bien choisie
2	Réflexion par rapport à un plan	-1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ dans une B.O.N. bien choisie
3	Id_E	+1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans toute B.O.N.

IV.3 Illustration géométrique de D_{10}



IV.4 Les 5 solides de Platon



IV.5 Correspondances entre isométries et éléments du groupe symétrique

Correspondance entre les éléments de \mathfrak{S}_4 et $\text{Isom}(\mathcal{T})$:

\mathfrak{S}_4	$\text{Isom}(\mathcal{T})$	Cardinal
$\text{Id}_{[1;n]}$	Identité	1
(1 2)	Réflexion par rapport au plan médiateur d'une arête	6
(1 2 3)	Rotation d'axe une hauteur du tétraèdre et d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$	8
(1 2 3 4)	Anti-rotation d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées et d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$	6
(1 2)(3 4)	Rotation d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées et d'angle $\pm \pi$	3

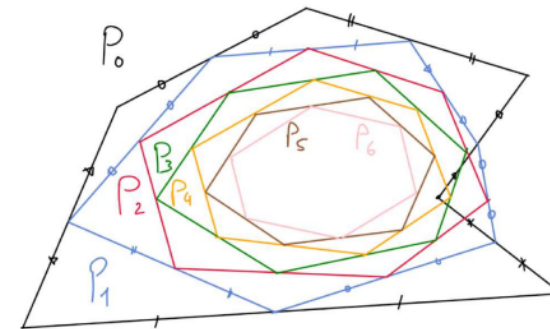
Correspondance entre les éléments de \mathfrak{S}_4 et $\text{Isom}^+(\mathcal{C})$:

\mathfrak{S}_4	$\text{Isom}^+(\mathcal{C})$	Cardinal
$\text{Id}_{[1;n]}$	Identité	1
(1 2)	Rotation d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées et d'angle $\pm \pi$	6
(1 2 3)	Rotation d'axe une grande diagonale et d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$	8
(1 2 3 4)	Rotation d'axe passant par les centres de deux faces opposées et d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$	6
(1 2)(3 4)	Rotation d'axe passant par les centres de deux faces opposées et d'angle $\pm \pi$	3

Correspondance entre les éléments de \mathfrak{S}_4 et $\text{Isom}^+(\mathcal{O})$:

\mathfrak{S}_4	$\text{Isom}^+(\mathcal{O})$	Cardinal
$\text{Id}_{[1;n]}$	Identité	1
(1 2)	Rotation d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées et d'angle $\pm \pi$	6
(1 2 3)	Rotation d'axe passant par les centres de deux faces opposées et d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$	8
(1 2 3 4)	Rotation d'axe passant par deux sommets opposés et d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$	6
(1 2)(3 4)	Rotation d'axe passant par deux sommets opposés et d'angle $\pm \pi$	3

IV.6 Suite de polygones



Remarques sur le plan

- Il y a beaucoup de choses à dire sur cette leçon ! On peut par exemple parler de barycentres et de géométrie affine (notamment en termes de coordonnées et de transformations affines usuelles), des formes quadratiques et des coniques ou encore des nombres complexes en géométrie.
- Penser à illustrer les propos avec beaucoup d'exemples et d'illustrations géométriques en annexe ainsi qu'au tableau.

Liste des développements possibles

- Groupe des isométries du cube.
- Matrices circulantes.
- Théorème de Gauss-Wantzel.

Bibliographie

- Claude Deschamps, *Tout-en-un MPSI*.
- Michèle Audin, *Géométrie*.
- Grégory Berhuy, *Algèbre : le grand combat*.
- Jean Delcourt, *Théorie des groupes*.
- Daniel Perrin, *Cours d'algèbre*.
- François Combes, *Algèbre et géométrie*.
- Philippe Caldero, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome 2*.
- Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Algèbre et Probabilités*.
- Philippe Caldero, *Carnet de voyage en Algèbre*.